Дәріс 12

Эллиптікалық теңдеулер. Лаплас теңдеуінің фундаменталдық шешімі. Гармониялық функциялар. Гармониялық функциялардың қасиеттері.

Эллиптікалық теңдеулер. Гармониялық функциялар.

Эллиптик типтегі теңдеулердің ең қарапайымы және негізгісі Лаплас

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{1}$$

және Пуассон

$$\Delta u = f(x) \tag{2}$$

теңдеулері.

E^n кеңістігінде S сырт пен шенелген шекті немесе шексіз D облысын қараймыз. Егер $u(x0 = u(x_1,..., x_n)$ функция шекті D облысында екі рет үздіксіз дифференциалданатын болып, Лаплас теңдеуін қанағаттандырса, $u(x)$ ты D облыста *гармониялық функция* деп атайды.

Егер $u(x)$ функция кеңістіктің мейлінше кіші аймағында, яғни центрі сол нүктеде болған жеткілікті кіші радиусты шарда гармониялық болса, онда сол нүктеде *гармониялық* деп аталады.

Егер $u(x)$ функция шексіз D облыстың координата басынан шекті қашықтықта жатқан кез – келген x нүктесінде гармониялық болып, жетерліктей үлкен $|x|$ тер үшін $\left(|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}\right)$

$$|u(x)| \le \frac{c}{|x|^{n-2}}, \qquad c - const$$

теңсіздік орындалса, $u(x)$ функция шексіз D облыста гармоник деп аталады.

D облысы S сыртпен шенелген E^n кеңістігіндегі облыс болып, $u(x)$ және $v(x)$ функциялар $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ класына тиісті болсын.

D облысы бойынша төмендегі

$$v\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \right],$$

$$v\Delta u - u\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$$

өрнектерін интегралдап және Гаусс – Остраградский форимуласын қолданып,

$$\int_D v\Delta u dx = -\int_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} ds, \tag{3}$$

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \tag{4}$$

формулаларын аламыз.Мұнда n – S ке өткізідген сыртқы нормал (3) ті Гриннің бірінші, ал (4) ті Гриннің екінші формуласы деп атайды.Егер $u(x)$ функция және $v(x)$ функциялар D облыста гармониялық болса, онда (3) және (4) формулалар төмендегі көрініске ие болады:

$$\int_S v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \sum_{i=1}^{n} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \tag{5}$$

$$\int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = 0 \tag{6}$$

(5) және (6) формулалар негізінде гармониялық функциялардың бірқатар қарапайым қасиеттері келіп шығады:

1) Егер D облыста гармониялық болған $u(x)$ функция $D \cup S$ да өзінің бірінші ретті туындылары мен бірге үздіксіз болып, D облыстың шекарасы S те нолге тең болса, онда барлық $x \in D \cup S$ тер үшін $u(x) = 0$ болады.(гармониялық функциялардың жалғыздығы қасиетті)

2) Егер D облыста гармониялық , $D \cup S$ да бірінші ретті туындылары мен үздіксіз болған $u(x)$ функцияның $\frac{\partial u}{\partial n}$ нормал туындысы D ның шекарасы S те нолге тең болса, барлық $x \in D$ нүктелер үшін $u = const$ болады.

3) D облыста гармониялық, $D \cup S$ та үздіксіз бірінші ретті туындылары мен үздіксіз болған $u(x)$ функцияның $\frac{\partial u}{\partial n}$ нормалд туындысынан S бойынша алынған интеграл нолге тең.

Шынында, (5) формулада $v(x) = 1, \quad x \in D$ десек,

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

пайда болады.

Гармониялық функциялардың қасиеттері

Т е о р е м а: Бірер – бір облыста гармониялық болған $u(x)$ функция осы облыста барлық ретті туындыларға ие болады.

Орта мән туралы теорема: $u(x)$ функция бірер – бір шарда гармониялық болып, шардың шекарасында үздіксіз болсын. Онда, $u(x)$ функцияның шар ценріндегі мәні, осы шарды қоршап тұрған сферадағы мәндерінің арифметикалық ортасына тең.

Экстремум принціпі: Шенелген D облыста тұрақты саннан өзге болған $u(x)$ гармониялық функция D облысының ішкі нүктелерінде максимум және минимумға жете алмайды.

Дәлелдеуі: Бірер – бір $x_0 \in D$ нүктеде $u(x)$ функция максимумға жетсін дейік.Яғни $u(x_0) = M$. D облысында жететін $|x - x_0| < \varepsilon$ шарды аламыз. Бұл шардың әрбір нүктесінде $u(x) = M$ болады. Шынында да егер y, $|y - y_0| < \varepsilon$ нүктеде $u(y) < M$ ($u(y) > M$ теңсіздік болуы мүмкін емес) теңсіздік орынды болса, $u(x)$ функцияүздіксіз болғаны үшін бұл теңсздік ол нүктенің бірер – бір $|\xi - y| < \delta$ айналасында да орынды болады.

Демек, барлық $|x - x_0| < \varepsilon$ шарда $u(x) = M$. Енді x – D облыстың кез – келген нүктесі болып, ал l x ті x_0 мен байланыстырушы және D да жататын үздіксіз қисық сызық болсын. D облысының шекарасы S пен l қисық сызық арасындағы қашықтықтан кіші болған ε санын аламыз. $|\eta - y| < \varepsilon$ шардың y центрін x_0 нүктеден x нүктеге қарап, l сызық бойынша жылжытамыз. Жоғарыдағы дәлел негізінде y кез – келген жағдайда болғанда да бұл шардың ішінде $u = M$ және $u(x) = M$ болады. Пайда болған қарама – қайшылық теореманың бірінші бөлімінің дұрыс екендігін көрсетеді. Дәл осылай екінші бөлімі, яғни минимум жағдайы дәлелденеді.

1 – нәтиже. Егер $u(x)$ функция шекті D облысында гармониялық болып, D да үздіксіз болса, онда $u(x)$ функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін облыстың шекарасында қабылдайды, яғни $m \le u(x) \le M$, бұл жерде m және M дер $u(x)$ функцияның D шекарасындағы ең кіші және ең үлкен мәндері.

Бұл нәтиженің дұрыстығы жоғарыда дәлелденген эстремум принципі және математикалық аналаизден белгілі Вейерштрасс теоремасынан келіп шығады.

2 – нәтиже. Егер $u(x)$ функция D шенелген облысында гармониялық, $\overline{D}$ да үздіксіз болып, S те нолге тең болса, барлық D да нолге тең болады.

Шынында да, $m = M = 0$ ден кез – келген $x \in D$ үшін $u(x) = 0$ болады.

3 – нәтиже. Егер u_1 және u_2 функциялар D облысында гармониялық, $\overline{D}$ да үздіксіз болып, S те бірдей мәндерді қабылдаса, барлық $\overline{D}$ да олар тек бір – біріне тең болады.

Шынында да, $u = u_1 - u_2$ десек, $u\big|_S = 0$ болады. 2 – нәтиже негізінде барлық D да $u \equiv 0$ немесе $u_1 \equiv u_2$ болады.

Ескерту: Экстремум принціпінің дәлелінде негізінен гармониялық функцияның үздіксіздігінен және орта мән туралы теоремадан пайдаланылады. Сол себепті экстремум принціпін басқаша формада келтіру мүмкін.

Егер тұрақты саннан өзге $u(x)$ функция D да үздіксіз болып, бұл облыстың әрбір x_0 нүктесі үшін R дің барлық кіші мәндерінде

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R|}\int_{S_R} u dS_R \quad \text{немесе} \quad u(x) = \frac{n}{|S_1| R^n}\int_{Q_R} u(\xi) d\xi$$

теңдік орынды болса, $u(x)$ функция D облыстың ішкі нүктелерінде максимум және минимумға ие болмайды.